القسم : رياضيات / جبر السنة : الرابعة المادة : نظرية الجبور المحاضرة : الثامنة

مبرهنة :

لتكن A جبر فوق حلقة تبديلية واحدية R ، إن مجموعة تطبيقات الاشتقاق المعرفة على A أي $Der(A)$ تشكل جبر فوق الحلقة R

البرهان :

وجدنا حسب المبرهنة السابقة أن المجموعة تشكل مديول فوق الحلقة R

لنعرف العملية $[\ ,\ ] : Der(A) \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$

$$(d_1, d_2) \longrightarrow [d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1$$

لنبرهن أن $[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1$ تطبيق اشتقاق على A

$$\forall x, y \in A \Rightarrow [d_1, d_2](x+y) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x+y)$$
$$= d_1 d_2 (x+y) - d_2 d_1 (x+y)$$
$$= d_1 (d_2 (x+y)) - d_2 (d_1 (x+y))$$
$$= d_1 [d_2 (x) + d_2 (y)] - d_2 [d_1 (x) + d_1 (y)]$$
$$= d_1 (d_2 (x)) + d_1 (d_2 (y)) - d_2 (d_1 (x)) - d_2 (d_1 (y))$$
$$= [d_1, d_2](x) + [d_1, d_2](y)$$

$$\forall \alpha \in R \quad \forall x \in A \quad [\alpha d_1, d_2](x)$$
$$= (\alpha d_1) d_2 (x) - d_2 (\alpha d_1 (x))$$
$$= \alpha (d_1 d_2)(x) - d_2 (\alpha d_1 (x))$$
$$= \alpha (d_1 d_2)(x) - \alpha (d_2 d_1 (x))$$
$$= \alpha [d_1, d_2](x)$$

$$\forall x, y \in A \quad [d_1, d_2]([x, y])$$
$$= (d_1 d_2 - d_2 d_1)([x, y])$$
$$= d_1 d_2 ([x, y]) - d_2 d_1 ([x, y])$$
$$= d_1 ([d_2 (x), y] + [x, d_2 (y)]) - d_2 ([d_1 (x), y] + [x, d_1 (y)])$$
$$= d_1 [d_2 (x), y] + d_1 [x, d_2 (y)] - d_2 [d_1 (x), y] - d_2 [x, d_1 (y)]$$
$$= [d_1 d_2 (x), y] + [d_2 (x), d_1 (y)] + [d_1 (x), d_2 (y)] + [x, d_1 d_2 (y)]$$

$- [d_2 d_1(x), y] - [d_1(x), d_2(y)] - [d_2(x), d_1(y)] - [x, d_2 d_1(y)]$

$= [d_1 d_2(x), y] + [x, d_1 d_2(y)] - [d_2 d_1(x), y] - [x, d_2 d_1(y)]$

$= [d_1 d_2(x) - d_2 d_1(x), y] + [x, d_1 d_2(y) - d_2 d_1(y)]$

$= [[d_1, d_2](x), y] + [x, [d_1, d_2](y)]$

ومنه نجد أن $[d_1, d_2]$ تطبيق اشتقاق

نلاحظ أن العملية $[\cdot,\cdot]$ تطبيق ولإثبات أن العملية $[\cdot,\cdot]$ تحقق شروط جبر لي

$\forall d \in Der(A) : [d, d] = dd - dd = 0$

$\forall d_1, d_2, d_3 \in Der(A) : [d_1 + d_2, d_3] = (d_1 + d_2) d_3 - d_3 (d_1 + d_2)$

مجموع ← بسبب توزيع الضرب على الجمع في حلقة التشاكلات الصورية

$= d_1 d_3 + d_2 d_3 - d_3 d_1 - d_3 d_2$

$= d_1 d_3 - d_3 d_1 + d_2 d_3 - d_3 d_2$

$= [d_1, d_3] + [d_2, d_3]$

بنفس الطريقة نجد أن

$[d_1, d_2 + d_3] = [d_1, d_2] + [d_1, d_3]$

$- \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall d_1, d_2 \in Der(A) ; [\alpha d_1, d_2] = (\alpha d_1) d_2 - d_2 (\alpha d_1)$

$= \alpha (d_1 d_2) - \alpha d_2 d_1$

$= \alpha (d_1 d_2 - d_2 d_1)$

$= \alpha [d_1, d_2]$

بنفس الطريقة نجد أن $\alpha [d_1, d_2] = [d_1, \alpha d_2]$

$\forall d_1, d_2, d_3 \in Der(A) :$

(1) $[d_1, [d_2, d_3]] = d_1 [d_2, d_3] - [d_2, d_3] d_1$

$= d_1 (d_2 d_3 - d_3 d_2) - (d_2 d_3 - d_3 d_2) d_1$

$= d_1 d_2 d_3 - d_1 d_3 d_2 - d_2 d_3 d_1 + d_3 d_2 d_1$

(2) $[d_2, [d_3, d_1]] = d_2 [d_3, d_1] - [d_3, d_1] d_2$

$= d_2 (d_3 d_1 - d_1 d_3) - (d_3 d_1 - d_1 d_3) d_2$

$= d_2 d_3 d_1 - d_2 d_1 d_3 - d_3 d_1 d_2 + d_1 d_3 d_2$

(3) $[d_3, [d_1, d_2]] = d_3 [d_1, d_2] - [d_1, d_2] d_3$

$= d_3 (d_1 d_2 - d_2 d_1) - (d_1 d_2 - d_2 d_1) d_3$

$= d_3 d_1 d_2 - d_3 d_2 d_1 - d_1 d_2 d_3 + d_2 d_1 d_3$

نجمع الحدود

$(1) + (2) + (3) = 0 \Leftarrow$ جبر لي $Der(A)$

تمرين :

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R عندئذٍ أياً كان $a \in A$ فإن الملاقة

$d_a : A \to A$

$\forall x \in A \quad d_a(x) = [a, x]$

هي تطبيق اشتقاق في A

الإثبات :

$\forall x, y \in A \quad x = y \Rightarrow [a, x] = [a, y]$

$\Rightarrow d_a(x) = d_a(y)$

$\forall x, y \in A \quad d_a(x + y) = [a, x + y] = [a, x] + [a, y]$

$= d_a(x) + d_a(y)$

$\forall \alpha \in R \quad x \in A \quad d_a(\alpha x) = [a, \alpha x] = \alpha [a, x] = \alpha d_a(x)$

$d_a([x, y]) = [a, [x, y]] = [a, [x, y]] + [a, [y, a]] + [y, [a, x]] = 0$

$[a, [x, y]] = -[x, [y, a]] - [y, [a, x]]$

$[a, [x, y]] = [x, [a, y]] + [[a, x], y]$

$= [x, d_a(y)] + [d_a(x), y]$

$\Leftarrow d_a$ تطبيق اشتقاق

تعريف : ليكن A جبر لي فوق الحلقة R لأجل كل $a \in A$ يسمى تطبيق الاشتقاق d_a تطبيق اشتقاق داخلي في A ونرمز لمجموعة تطبيقات الاشتقاق الداخلية في A بالرمز $Inn(A)$

ينتج مباشرة من التعريف أن $Inn(A) \subset Der(A)$ لأن $\forall\ a \in A$ يكون
$d_a \in Inn(A)$

تعريف:

ليكن A جبر لي على الحلقة R و N مجموعة جزئية غير خالية في A نقول ان N تشكل جبر لي جزئي في A إذا حققت

① N مودول جزئي في A

② $\forall\ a, b \in N : [a, b] \in N$ أي مغلقة بالنسبة للضرب

تعريف:

ليكن A جبر لي على الحلقة R نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية I في A إنها تشكل مثالية في A إذا حققت

① I مودول جزئي في A

② لأي $a \in A$ ولأي $x \in I$ فإن $[a, x] \in I$
أو بمعنى آخر لأي $a \in A$ فإن $d_a(I) \subseteq I$

تمرين:

اثبت ان كل مثالي في جبر لي هو جبر لي جزئي

الحل:

ليكن A جبر لي ولتكن I مثالية في A

① بما أن I مودول جزئي في A

② $\forall\ x, y \in I \Rightarrow [x, y] \in I$
وبما أن $I \subseteq A$ فإن $x \in A$ ومنه
$[x, y] = d_x(y) \in I$
ومنه فإن I جبر لي جزئي في A

ملاحظة:

في أي جبر لي A كل من A و 0 يشكل جبر لي جزئي في A

تعريف:

لتكن A جبري مغمور الحلقة R ولنفرض أن S جبري جزئي في A نسمي المجموعة

$N(S) = \{a ; a \in A , d_a(S) \subseteq S\}$

منظم S في A

تمهيد:

لتكن A جبري على الحلقة R و S جبري جزئي في A ، إن المجموعة

$N(S) = \{a ; a \in A , d_a(S) \subseteq S\}$

تشكل جبري جزئي في A

البرهان:

واضح أن $d_a(S) \subseteq A$ ، $0 \neq$ لأن $a \in A$ و أن $d_0(S) = 0 \in S$

$\forall \alpha, \beta \in R \quad \forall a, b \in N(S)$

ولنبرهن أن $\alpha a + \beta b \in N(S)$ أيضاً

واضح أن $\alpha a + \beta b \in A$ ، ولنثبت أن $x \in S$ ثابت

$$d_{(\alpha a+\beta b)}(x) = [\alpha a + \beta b , x] = [\alpha a , x] + [\beta b , x]$$
$$= \alpha [a, x] + \beta [b, x]$$
$$= \alpha \underbrace{d_a(x)}_{\in S} + \beta \underbrace{d_b(x)}_{\in S} \in S$$

وبما أن S جبر جزئي وحسب تعريف N(S) نجد أن $\alpha a + \beta b \in S$

وبالتالي N(S) يشكل فضاء جزئي

ولنبرهن أن $[a,b] \in N(S) \quad \forall a, b \in N(S)$

واضح أن $[a,b] \in A$ وبالتالي لنثبت أن $x \in S$ ثابت

$$d_{[a,b]}(x) = [[a,b], x] = [x, [a,b]] + [a, [b, x]] + [b, [x, a]] = 0$$

$$[[a,b], x] = [a, [b, x]] + [b, [x, a]] = [a, d_b(x)] - [b, d_a(x)]$$
$$= \underbrace{d_a(\underbrace{d_b(x)}_{\in S})}_{\in S} - \underbrace{d_b(\underbrace{d_a(x)}_{\in S})}_{\in S}$$

وعليه فإن $d_{[a,b]}(x) = [[a,b], x] \in S$

ومن حسب تعريف الجبرية $N(S)$ فإن $[a,b] \in N(S)$

وبهذا فإن $N(S)$ جبر جزئي في A

انتهت المحاضرة